2025

CANPOINT

CANPOINT®

全品

高考复习方案

主编：肖德好

听课手册

新高考地区

数学

RJA

延边教育出版社

新教材 新一轮 数学

《中国高考评价体系》

指导

2025版《全品复习方案》

依据 《普通高中数学课程标准》

细研 高考命题特点及趋势

特点

1. 关注新教材，细讲精练，密切贴合新教材。
2. 渗透数学学科核心素养：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析。
3. 体现高考命题趋势，精选模拟试题。
4. 结合教学一线一轮复习实际，合理设置讲练内容。

▼ 图书结构与特点

听课手册

必备基础梳理 —— 教材改编，理解应用；易错易混，拾遗补漏

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 已知 $p: a\in P\cup Q$, $q: a\in P$, 则 p 是 q 的______条件.
2. [教材改编] 命题“任意两个等边三角形都相似”是______量词命题. 它的否定是______, 并且是______(填“真”或“假”)命题.
3. [教材改编] 已知 $\triangle ABC$ 的三边的长分别为 a,b,c, 且 $a\leqslant b\leqslant c$, 那么“$a^2+b^2=c^2$”是“$\triangle ABC$ 为直角三角形”的______条件.

夯基础

常识常错巩固

究本源

课堂考点探究 —— 核心章节，分课时讲解

学科难点 思维拓展

微点 2 函数奇偶性的应用

例 2 (1)[2023·新课标Ⅱ卷] 若 $f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a=$ ( )

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

应用演练

1. 【微点 2】[2024·浙江嘉兴模拟] 已知函数 $f(x)=(x+a-2)(x^2+a-1)$ 为奇函数, 则 $f(a)$ 的值是 ( )

A. 0 B. -12 C. 12 D. 10

思维拓展(一)

逻辑推理之抽象函数的性质

抽象函数主要有两个研究方向:一是由抽象函数结构、性质,联想已学过的基本函数,再由基本函数的相关结论,预测、猜想抽象函数可能有的相关结论.二是根据给出的抽象函数性质,推导其特殊的性质和关系.考题多和函数的性质(单调性、奇偶性、周期性等)相结合,以小题的方式考查.

例 [2022·新高考全国Ⅱ卷] 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$, $f(1)=1$, 则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$ (A)

A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

[解法二] 取 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x$ 符合条件, 则 $T=6$, 计算可得 $f(2)=-1$, $f(3)=-2$, $f(4)=-1$, $f(5)=1$, $f(6)=2$, 所以 $\sum_{k=1}^{6}f(k)=1-1-2-1+$

基点·难点·重点 讲清·讲透·讲活

作业手册

课时作业 —— 分层排查 挑战零失误

2. [2023·蚌埠模拟] 已知全集 $U=\{x|-3<x<3\}$, 集合 $A=\{x|x^2+x-2<0\}$, 则 $\complement_UA=$ ( )

A. $(-2,1]$ B. $(-3,-2]\cup[1,3)$ C. $[-2,1)$ D. $(-3,-2)\cup(1,3)$

综合提升

7. [2023·武汉调研] 设集合 $A=\{y|y=\sqrt{x}+1, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=e^x, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$ ( )

A. $(0,+\infty)$ B. $[1,+\infty)$ C. $(0,1)$ D. $(-\infty,1)$

全覆盖、破重难

增分加练 —— 题型、阶段 自查、趋势；提综合

小题阶段自查(一) 预备知识

一、单选题

1. [2023·辽宁沈阳二模] 已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x<2\}$, $B=\{x|x>1\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ ( )

A. $\{x|-1\leqslant x<1\}$ B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$ C. $\{x|-1\leqslant x<2\}$ D. $\{x|x<2\}$

5. [2023·山西朔州模拟] 函数 $y=3x+\frac{4}{3x-1}\left(x>\frac{1}{3}\right)$ 的最小值为 ( )

A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

解答专题特训(一) 函数与导数

解答题(本大题共 6 小题,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. [2024·江苏南京模拟] 已知函数 $f(x)=x^2+2x-a\ln(x+1)(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x)>-1-e^2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

3. [2023·安徽铜陵三模] 已知函数 $f(x)=e^x-ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)试讨论函数 $f(x)$ 的极值;

(2)若存在实数 $x>0$, 使得 $xe^{bx}-e^x+(b-1)x^2+x\ln x\geqslant 0$ 成立, 求实数 b 的取值范围.

薄弱点·疑难点 练熟·练透·练活

目录 CONTENTS

第五单元　平面向量与复数

第六单元　数列

第七单元　立体几何

第八单元 解析几何

第九单元 统计

第十单元 排列、组合与二项式定理、概率

UNIT

第一单元 | 预备知识

第1讲　集合

课标要求

1. 通过实例,了解集合的含义,理解元素与集合的关系.
2. 针对具体问题,能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.
3. 在具体情境中,了解全集与空集的含义.
4. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
5. 理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.
6. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
7. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 集合及其表示方法

(1)集合元素的性质:________、________、无序性.

(2)集合与元素的关系:①属于,记为________;②不属于,记为________.

(3)集合的表示方法:列举法、________、____________和区间法.

(4)常见数集及记法

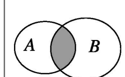
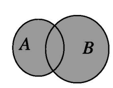
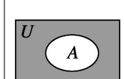
数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	________	________	________	________	________

2. 集合间的基本关系

	文字语言	符号语言	记法
子集	集合 A 中________都是集合 B 中的元素	$x\in A\Rightarrow x\in B$	$A\subseteq B$ 或______
真子集	集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中____有一个元素不属于 A	①$A\subseteq B$;②$\exists x\in B$,$x\notin A$	A____B 或 $B\supsetneqq A$
相等	集合 A,B 中的元素完全______	$A\subseteq B,B\subseteq A$	______
空集	______任何元素的集合,空集是任何集合的子集	①$\forall x,x\notin\varnothing$;②$\varnothing\subseteq A$	$\varnothing$

(续表)

3. 集合的基本运算

运算＼表示	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	由所有属于 A____属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,____$x\in B\}$		______
并集	由所有属于 A____属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,____$x\in B\}$		______
补集	全集 U 中____属于 A 的所有元素组成的集合	$\{x\mid x\in U$,x____$A\}$		______

4. 集合的运算性质

(1)交集的运算性质:$A\cap B=B\cap A$;$A\cap A=A$;$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$;$A\cap B=A\Leftrightarrow A$________$B$.

(2)并集的运算性质：$A\cup B=$________；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$；$A\cup B=$________$\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(3)补集的运算性质：$A\cup(\complement_U A)=U$；$A\cap(\complement_U A)=$________；$\complement_U(\complement_U A)=$________；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)$________$(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cap B)=$________$\cup$________.

◆◆ 常用结论

1. 集合子集的个数：集合 A 中有 n 个元素，则集合 A 有 2^n 个子集、2^n-1 个真子集、2^n-1 个非空子集、2^n-2 个非空真子集.
2. 子集的传递性：$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$（真子集也满足）.
3. $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow \complement_U A\supseteq\complement_U B$.
4. 集合元素个数：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$（常用在实际问题中）.

对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] 已知集合 $A=\{0,1,x^2-5x\}$，若 $6\in A$，则实数 x 的值为________.

2. [教材改编] 已知集合 $C=\{(x,y)\mid y=x\}$，集合 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}2x-y=1,\\x+4y=5\end{cases}\right\}$，集合 D 用列举法表示为________，并且 C________D（从“$=$”“$\subseteq$”“$\supseteq$”中选一个合适的填入）

3. [教材改编] 已知全集 $U=A\cup B=\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x\leqslant 10\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{1,3,5,7\}$，则集合 $B=$____________.

题组二　常错题

◆**索引：**忽视集合元素的性质致错；对集合的表示方法理解不到位致错；忘记空集的情况致错；忽视集合运算中端点取值致错.

4. 已知集合 $\{1,a\}=\{a,a^2\}$，则实数 $a=$________.

5. 已知集合 $M=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$，$N=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$，则 $M\cup N=$________.

6. 已知集合 $A=\{2,3\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，则实数 a 的所有可能取值组成的集合为__________.

7. 设集合 $A=\{x\mid a-1<x<a+1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 1<x<5,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围为__________.

课堂考点探究

探究点一　集合的概念

例1 (1)设集合 $A=\{2,4\}$，$B=\{1,2\}$，集合 $M=\left\{z\,\middle|\,z=\dfrac{x}{y},x\in A,y\in B\right\}$，则 M 中所有元素之和为　　(　　)

A. 3　　B. 5

C. 7　　D. 9

(2)已知集合 $A=\{m+2,2m^2+m\}$，若 $3\in A$，则 m 的值为________.

◆◆ 总结反思

解决集合含义问题的关键有三点：一是确定构成集合的元素是什么；二是看这些元素的限制条件是什么；三是根据元素的特征（满足的条件）构造关系式解决相应问题.特别提醒：含字母的集合问题，在求出字母的值后，需要验证集合的元素是否满足互异性.

变式题 (1)已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{N}^*,y\geqslant x\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为　　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

(2)设 $a,b\in\mathbf{R}$，已知集合 $\left\{1,a,\dfrac{b}{a}\right\}=\{0,a^2,a+b\}$，则 $(a+b)^{2024}=$________.

探究点二　集合间的基本关系

例2 (1)[2023·云南师大附中二模] 已知 $A=\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{y\mid y=6m+5,m\in\mathbf{N}\}$，则集合 A 与集合 B 之间的关系为　　(　　)

A. $A=B$　　B. $B\subsetneqq A$

C. $A\subsetneqq B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

(2)[2023·新课标Ⅱ卷] 设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$　　(　　)

A. 2　　B. 1　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. -1

◆◆ **总结反思**

(1)一般利用数轴法、Venn 图法以及结构法判断两集合的关系,对于含有参数的集合,需要对式子进行变形,有时需要进一步对参数进行分类讨论.

(2)确定非空集合 A 的子集的个数,需先确定集合 A 中的元素的个数.特别提醒:不能忽略任何非空集合是它自身的子集,空集是非空集合的真子集.

(3)根据集合的关系求参数值(或取值范围)的关键是将条件转化为元素满足的式子或区间端点间的关系.

变式题 (1)满足$\{1\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3\}$的集合 A 的个数是 ( )

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 8

(2)[2023·吉林模拟] 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}||x|<2\}$,$B=\{x|ax-1=0\}$,若 $B\subsetneqq A$,则实数 a 的值为 ( )

A. 0 或 1　　B. $\frac{1}{2}$或 1

C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

探究点三　集合的基本运算

» 角度 1　集合的运算

例 3 (1)[2023·杭州期末] 已知集合 $A=\{x|x^2-1<0\}$,$B=\{x|\lg x\leqslant 0\}$,则 $A\cup B=$ ( )

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$　　D. $\{x|-1<x\leqslant 1\}$

(2)[2023·全国乙卷] 设集合 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x<1\}$,$N=\{x|-1<x<2\}$,则$\{x|x\geqslant 2\}=$ ( )

A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup(\complement_U M)$

C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup(\complement_U N)$

◆◆ **总结反思**

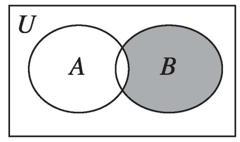
对于已知集合的运算,可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解,必要时可结合数轴以及 Venn 图求解.

变式题 (1)[2023·新课标Ⅰ卷] 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$,$N=\{x|x^2-x-6\geqslant 0\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

(2)[2023·广东六校一联] 已知集合 $U=\mathbf{R}$,$A=\left\{x\left|\frac{x-3}{x+1}>0\right.\right\}$,$B=\{x|y=\ln(3-x)\}$,则图中阴影部分表示的集合为 ( )



A. $[-1,3]$　　B. $(3,+\infty)$

C. $(-\infty,3]$　　D. $[-1,3)$

» 角度 2　利用集合的运算求参数的值(范围)

例 4 (1)设集合 $A=\{x|x^2-4\leqslant 0\}$,$B=\{x|2x+a\leqslant 0\}$,且 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$,则 $a=$ ( )

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

(2)已知集合 $A=\{2,-2\}$,$B=\{x|x^2-ax+4=0\}$,若 $A\cup B=A$,则实数 a 的取值集合为 ( )

A. $\{a|-4<a<4\}$　　B. $\{a|-2<a<2\}$

C. $\{-4,4\}$　　D. $\{a|-4\leqslant a\leqslant 4\}$

◆◆ **总结反思**

利用集合的运算求参数的值或取值范围的方法

(1)与不等式有关的集合,一般利用数轴解决,要注意端点值能否取到.

(2)若集合中的元素能一一列举,则一般先用观察法得到不同集合中元素之间的关系,再列方程(组)求解.

变式题 (1)(多选题)已知集合 $M=\{x|6x^2-5x+1=0\}$,集合 $P=\{x|ax=1\}$,若 $M\cap P=P$,则实数 a 的值可能为 ( )

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

(2)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x\geqslant a\}$,集合 $B=\{x\in\mathbf{Z}|2^x\leqslant 4\}$.若 $A\cap B$ 只有 4 个子集,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-2,-1]$　　B. $[-2,-1]$

C. $[0,1]$　　D. $(0,1]$

» 角度 3　集合语言的运用

例 5 (1)某中学的学生积极参加体育锻炼,其中有 96%的学生喜欢足球或游泳,60%的学生喜欢足球,82%的学生喜欢游泳,则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 ( )

A. 62%　　B. 56%

C. 46%　　D. 42%

(2)已知 U 是非空数集，若非空集合 A_1, A_2 满足以下三个条件，则称 (A_1, A_2) 为集合 U 的一种真分拆，并规定 (A_1, A_2) 与 (A_2, A_1) 为集合 U 的同一种真分拆.

①$A_1 \cap A_2 = \varnothing$；

②$A_1 \cup A_2 = U$；

③$A_i(i=1,2)$ 的元素个数不是 A_i 中的元素.

则集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的真分拆的种数是 ( )

A. 5　　B. 6

C. 10　　D. 15

◆◆ **总结反思**

以集合语言为背景的新定义问题，需正确理解新定义(即分析新定义的特点，把新定义所叙述的问题的本质弄清楚)，转化成熟知的数学情境，并能够应用到具体的解题过程中，这是破解新定义集合问题的关键所在.

变式题 [2023·湖南师大附中模拟] 若一个非空数集 F 满足：对任意 $a, b \in F$，都有 $a+b, a-b, ab \in F$，且当 $b \neq 0$ 时，有 $\frac{a}{b} \in F$，则称 F 为一个数域，给出以下四个命题：

①0 是任何数域的元素；

②若数域 F 有非零元素，则 $2024 \in F$；

③集合 $P=\{x \mid x=3k, k \in \mathbf{Z}\}$ 为数域；

④有理数集为数域.

其中真命题的个数为________.

第 2 讲　常用逻辑用语

课标要求

1. 理解必要条件、充分条件、充要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.
2. 理解全称量词与存在量词的意义，能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定，能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 的________条件，q 是 p 的________条件	
p 是 q 的________条件	$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$
p 是 q 的________条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$
p 是 q 的________条件	$p \Leftrightarrow q$
p 是 q 的__________条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$

2. 全称量词与存在量词

(1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作__________，用符号“________”表示.

(2)短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作__________，用符号“________”表示.

(3)含有一个量词的命题的否定：

全称量词命题：$\forall x \in M, p(x)$，它的否定是__________.

存在量词命题：$\exists x \in M, p(x)$，它的否定是__________.

3. 常用的正面叙述词语和它的否定词语

正面词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是
否定词语	不等于(≠)	不大于(≤)	不小于(≥)	不是

正面词语	都是	任意的	所有的	至多有一个	至少有一个
否定词语	不都是	某个	某些	至少有两个	一个也没有

对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] 已知 $p: a \in P \cup Q$，$q: a \in P$，则 p 是 q 的__________条件.
2. [教材改编] 命题“任意两个等边三角形都相似”是__________量词命题. 它的否定是____________________，并且是________(填“真”或“假”)命题.
3. [教材改编] 已知△ABC 的三边的长分别为 a, b, c，且 $a \leq b \leq c$，那么“$a^2+b^2=c^2$”是“△ABC 为直角三角形”的________条件.

题组二　常错题

◆ **索引**：对充分必要条件判断错误；全称量词命题或存在量词命题的否定出错；充分、必要条件的推理考虑不全面.

4. 已知 $p:x<a$，$q:x-2\leqslant 0$.

①若 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是________；

②若 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是________.

5. 命题“奇数的立方是奇数”的否定是________________.

6. 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 的__________条件.

课堂考点探究

探究点一　充分条件与必要条件的判断

例 1 (1)[2022・浙江卷] 设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\sin x=1$”是“$\cos x=0$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2023・重庆巴蜀中学月考] “$x<0$”是“$\log_3(x+1)<0$”的　　(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(3)[2023・厦门二诊] 关于 x 的不等式 $ax^2-2x+1>0$ 恒成立的充分不必要条件可以是(　　)

A. $a\geqslant 1$　　B. $a>1$

C. $0<a<\frac{1}{2}$　　D. $a>2$

变式题 (1)[2023・江苏苏州中学月考] “$a+b>4$”是“$a>2$ 且 $b>2$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2023・山东德州三模] 已知 $p:x=-1$，q：向量 $\boldsymbol{a}=(1,x)$ 与 $\boldsymbol{b}=(x+2,x)$ 共线，则 p 是 q 的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

◆◆ **总结反思**

充分条件、必要条件的两种判定方法

(1)定义法：适用于定义、定理的判断问题；

(2)集合法：多适用于条件中涉及参数的取值范围的推断问题.

探究点二　充分条件与必要条件的应用

例 2 (1)设 α，β 为两个平面，则 $\alpha/\!/\beta$ 的充要条件是　　(　　)

A. α 内有无数条直线与 β 平行

B. α 内有两条相交直线与 β 平行

C. α 与 β 平行于同一条直线

D. α 与 β 垂直于同一个平面

(2)[2023・福州三中模拟] 设 $p:4x-3<1$；$q:x-(2a+1)<0$. 若 p 是 q 的充分不必要条件，则　　(　　)

A. $a>0$　　B. $a>1$

C. $a\geqslant 0$　　D. $a\geqslant 1$

◆◆ **总结反思**

充分条件、必要条件的应用一般表现在参数的求解问题上，解题时通常把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系，然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解. 解题过程中要注意检验区间的端点值.

变式题 (1)已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-2}{x+1}\leqslant 0\right\}$，$x\in A$ 的一个必要条件是 $x\geqslant a$，则实数 a 的取值范围为　　(　　)

A. $a<0$　　B. $a\geqslant 2$

C. $a\leqslant -1$　　D. $a\geqslant -1$

(2)已知 $p:f(x)=x-a\ln x$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增；$q:a<m$. 若 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 m 的取值范围为________.

探究点三　全称量词与存在量词

角度1　全称量词命题与存在量词命题的真假判断

例3 [2023·山西运城一模] 下列命题是真命题的为 (　　)

A. $\exists x\in \mathbf{N},4x<-3$

B. $\forall x\in \mathbf{R},x^2+2>0$

C. $\forall x\in \mathbf{N},2^x>x^2$

D. $\exists x\in \mathbf{Z},3x-2=0$

总结反思

全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法：

命题名称	真假	判断方法一	判断方法二
全称量词命题	真	所有对象使命题为真	否定为假
	假	存在一个对象使命题为假	否定为真
存在量词命题	真	存在一个对象使命题为真	否定为假

变式题 下列命题中,为真命题的是 (　　)

A. $\exists x\in \mathbf{R},\sin^2\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}=\frac{1}{3}$

B. $\forall x\in(0,\pi),\sin x>\cos x$

C. $\exists x\in \mathbf{R},x^2+x=-2$

D. $\forall x\in(0,+\infty),e^x>x+1$

角度2　含有一个量词的命题的否定

例4 (1) $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x>\sin x$ 的否定是 (　　)

A. $\exists x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x\leqslant\sin x$

B. $\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x\leqslant\sin x$

C. $\forall x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x>\sin x$

D. $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x\leqslant\sin x$

(2)命题 p:有的等差数列是等比数列,则其否定为 (　　)

A. 有的等差数列不是等比数列

B. 有的等比数列是等差数列

C. 所有的等差数列都是等比数列

D. 所有的等差数列都不是等比数列

总结反思

全称量词命题与存在量词命题的否定:

①改写量词:确定命题所含量词的类型,省去量词的要结合命题的含义加上量词,再对量词进行改写.

②否定结论:对原命题的结论进行否定.

变式题 (1)命题"$\exists x>0,e^x=x+1$"的否定是 (　　)

A. $\forall x>0,e^x\neq x+1$

B. $\forall x\leqslant 0,e^x\neq x+1$

C. $\exists x>0,e^x\neq x+1$

D. $\forall x>0,e^x=x+1$

(2)17世纪,数学家费马提出猜想:"对任意正整数 $n>2$,关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解",这个猜想被称为费马大定理.则费马大定理的否定为 (　　)

A. 对任意正整数 n,关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 都没有正整数解

B. 对任意正整数 $n>2$,关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

C. 存在正整数 $n\leqslant 2$,关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

D. 存在正整数 $n>2$,关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

角度3　含量词命题的应用

例5 (1)若"$\exists x\in[-1,2],-x^2+2\geqslant a$"是假命题,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $a>2$　　B. $a\geqslant 2$

C. $a>-2$　　D. $a\leqslant -2$

(2)已知函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}\left(x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$, $g(x)=2^x+a\ (x\in[2,3])$,若 $\forall x_1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $\exists x_2\in[2,3],f(x_1)\leqslant g(x_2)$,则实数 a 的取值范围是________.

总结反思

根据命题的真假求参数的一般步骤:

(1)根据题目条件,推出每一个命题的真假(有时不一定只有一种情况);

(2)求出每个命题是真命题时参数的取值范围;

(3)根据每个命题的真假情况,求出参数的取值范围.

变式题 (1)已知 p:"$\exists x\in\mathbf{R},ax^2+2x+1<0$"是假命题;$q:a\in(1,+\infty)$.则 q 是 p 的________条件.(从"充分不必要""必要不充分""充要""既不充分也不必要"中选一个正确的填入)

(2)[2023·湖北枣阳一中月考] 若"$\exists x\in[1,2],2x^2-\lambda x+1<0$"是假命题,则实数 λ 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,2\sqrt{2}]$ B. $\left[2\sqrt{2},\dfrac{9}{2}\right]$

C. $(-\infty,3]$ D. $\left[\dfrac{9}{2},+\infty\right)$

第 3 讲 等式与不等式

课标要求 梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

(1)作差法 $\begin{cases}a-b>0\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b,\\ a-b=0\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b,\\ a-b<0\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b.\end{cases}$

(2)作商法

$\begin{cases}\dfrac{a}{b}>1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0),\\ \dfrac{a}{b}=1\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a,b\neq0),\\ \dfrac{a}{b}<1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0).\end{cases}$

2. 等式的性质

(1)若 $a=b,b=c$,则 $a=c$.

(2)如果 $a=b$,则对任意 c,都有________或________.

(3)如果 $a=b$,则对任意不为零的 c,都有________或________.

3. 不等式的性质

(1)对称性:$a>b\Leftrightarrow$________(双向性).

(2)传递性:$a>b,b>c\Rightarrow a>c$(单向性).

(3)可加性:$a>b\Leftrightarrow a+c$________$b+c$(双向性).

(4)可乘性:$a>b,c>0\Rightarrow ac$________bc;

$a>b,c<0\Rightarrow ac$________bc.

(5)$a>b,c>d\Rightarrow$________(单向性).

(6)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac$________$bd$(单向性).

(7)乘方法则:$a>b>0\Rightarrow a^n$________$b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$(单向性).

◆◆ **常用结论**

1. 若 $a<x<b,c<y<d$,则 $a-d<x-y<b-c$.

2. 若 $\dfrac{a}{b}<1,a,b,m>0$,则 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+m}{b+m}<1$;

若 $\dfrac{a}{b}>1,a,b,m>0$,则 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+m}{b+m}>1$.

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 设 $t=a+2b,s=a+b^2+1$,则 s 与 t 的大小关系是________.

2. [教材改编] 已知 $2<a<3,-2<b<-1$,则 $2a+b$ 的取值范围为________.

3. [教材改编] 下列命题中为真命题的是________.(填写序号)

①若 $a>b>0$,则 $ac^2>bc^2$;

②若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$;

③若 $a>b>0$ 且 $c<0$,则 $\dfrac{c}{a^2}>\dfrac{c}{b^2}$;

④若 $a>b$ 且 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$,则 $ab<0$.

题组二 常错题

◆**索引**:求取值范围时乱用不等式的加法法则致错;乘法运算时不注意符号的影响致错;运用作差法时对差的变形不彻底或变形方向不明确致错.

4. 已知 $-1<x<4,2<y<3$,则 $x-y$ 的取值范围是________.

5. 已知实数 $a\in(-3,1),b\in\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4}\right)$,则 $\dfrac{a}{b}$ 的取值范围是________.

6. 设 $p=1+2x^4,q=2x^3+x^2$,则 p,q 的大小关系是________.

探究点一 比较数(式)的大小

例 1 (1)设 $x,y\in\mathbf{R}$,比较$(x^2-y^2)^2$与$xy(x-y)^2$的大小.

(2)已知a,b都是正数,试比较a^ab^b与a^bb^a的大小.

◆◆ **总结反思**

(1)判断两个式子大小关系的常用方法:作差法、作商法、不等式性质法、函数单调性法、中间量法、特殊值法等.

(2)作差(商)法的一般步骤是:作差(商),变形,定号,得出结论.

变式题 (1)[2023·福建三明一模] 已知$a=\sqrt{2}$,$b=\sqrt{7}-\sqrt{3}$,$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,则a,b,c的大小关系为 ( )

A. $a>b>c$ B. $a>c>b$

C. $c>a>b$ D. $c>b>a$

(2)若$a=\dfrac{\ln 3}{3}$,$b=\dfrac{\ln 4}{4}$,$c=\dfrac{\ln 5}{5}$,则 ( )

A. $a<b<c$ B. $c<b<a$

C. $c<a<b$ D. $b<a<c$

探究点二 不等式的性质

例 2 (1)[2023·合肥一模] 已知$a>b>c>d>0$,且$a+d=b+c$,则下列不等式中不成立的是 ( )

A. $a+c>b+d$ B. $ac>bd$

C. $ad<bc$ D. $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$

(2)(多选题)若$\dfrac{c^3}{a}<\dfrac{c^3}{b}<0$,则 ( )

A. $|a|<|b|$ B. $ac<bc$

C. $\dfrac{a-b}{c}>0$ D. $0<\dfrac{a}{b}<1$

◆◆ **总结反思**

解决不等式有关问题常用的三种方法:

(1)直接利用不等式的性质逐个验证,利用不等式的性质判断不等式是否成立时要特别注意前提条件;

(2)利用特殊值法排除错误答案;

(3)构造函数,利用函数的单调性.

变式题 (1)(多选题)[2023·海口模拟] 下列四个条件中,是$x>y$的充分不必要条件的是 ( )

A. $xc^2>yc^2$ B. $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}<0$

C. $|x|>|y|$ D. $\ln x>\ln y$

(2)已知$a>b$,则下列不等式中一定成立的是 ( )

A. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ B. $a^2>b^2$

C. $\ln a>\ln b$ D. $2^{a-b}>1$

(3)(多选题)[2023·湖南长郡中学二模] 已知实数a,b,c满足$0<a<b<c$,则下列结论正确的是 ( )

A. $\dfrac{1}{c-a}>\dfrac{1}{b-a}$

B. $\dfrac{b}{a}>\dfrac{b+c}{a+c}$

C. $\dfrac{1}{a(c-a)}>\dfrac{1}{b(c-a)}$

D. $ab+c^2>ac+bc$

探究点三 利用不等式性质求取值范围

例 3 (1)已知三个正数a,b,c满足$a\leqslant b+c\leqslant 2a$,$b\leqslant a+c\leqslant 2b$,则$\dfrac{b}{a}$的取值范围是 ( )

A. $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right]$ B. $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

C. $[2,3]$ D. $[1,2]$

(2)若$-1<a+b<3$,$2<a-b<4$,则$2a+3b$的取值范围为________.

◆◆ **总结反思**

求代数式的取值范围需注意两点:(1)严格运用不等式的性质;(2)利用整体思想,通过"一次性"不等关系的运算求解范围,防止在多次运用不等式的性质时扩大变量的取值范围.

变式题 已知实数 x,y 满足 $-1\leqslant x+y\leqslant 3$,$4\leqslant 2x-y\leqslant 9$,则 ( )

A. $1\leqslant x\leqslant 3$　　B. $-2\leqslant y\leqslant 1$

C. $2\leqslant 4x+y\leqslant 15$　　D. $\dfrac{1}{3}<x-y<\dfrac{23}{3}$

第 4 讲　基本不等式

课标要求　掌握基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}(a,b>0)$.结合具体实例,能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$

(1)基本不等式成立的条件:________.

(2)等号成立的条件:当且仅当______时取等号.

(3)数______称为 a,b 的算术平均数;数 $\sqrt{ab}$ 称为 a,b 的几何平均数.

2. 几个重要的不等式

(1) $a^2+b^2\geqslant$______$(a,b\in\mathbf{R})$.

(2) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant$______($a,b$ 同号).

(3) $ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R})$.

(4) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbf{R})$.

3. 利用基本不等式求最值问题

已知 $x>0,y>0$.

(1)如果积 xy 是定值 p,那么当且仅当 $x=y$ 时,$x+y$ 有最小值,是______.(简记:积定和最小)

(2)如果和 $x+y$ 是定值 p,那么当且仅当 $x=y$ 时,xy 有最大值,是______.(简记:和定积最大)

◆◆ **常用结论**

1. 若 $a>0,b>0$,则 $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

2. 当 $x>0$ 时,函数 $y=x+\dfrac{a}{x}\ (a>0)$ 在 $x=\sqrt{a}$ 处取得最小值 $2\sqrt{a}$;当 $x<0$ 时,函数 $y=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$ 在 $x=-\sqrt{a}$ 处取得最大值 $-2\sqrt{a}$.

对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] 当 $x=$______时,$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 取得最小值______.

2. [教材改编] 已知 $x>1$,则 $x+\dfrac{1}{x-1}$ 的最小值为______.

3. [教材改编] 用篱笆围一个面积为 $100\ \mathrm{m}^2$ 的矩形菜园,则当所用篱笆最短时,所用篱笆的长度是______m;若矩形菜园一边靠墙,墙的长度为 9 m,则当矩形和墙平行的边长为______m 时,所用篱笆最短.

题组二　常错题

◆ **索引**:对于基本不等式的应用,注意字母的正负以及等号成立的条件;等号不成立时,通常考虑利用函数的单调性求解.

4. 函数 $f(x)=2x+\dfrac{8}{x}+1\ (x<0)$ 的最大值为______.

5. 当 $x\geqslant 2$ 时,$x+\dfrac{4}{x+2}$ 的最小值为______.

探究点一 直接用基本不等式

例 1 (1)已知 x,y 都是正数,且 $x\neq y$,则下列选项不恒成立的是 ( )

A. $\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$ B. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2$

C. $\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}$ D. $xy+\frac{1}{xy}>2$

(2)(多选题)[2023·山东济宁二模] 已知 $m>0,n>0$,且 $m+n=2mn$,则下列结论中正确的是 ( )

A. $mn\geqslant1$ B. $m+n\leqslant\sqrt{2}$

C. $m^2+n^2\geqslant2$ D. $2m+n\geqslant3+2\sqrt{2}$

总结反思

利用基本不等式比较大小,主要有两个思路:一是直接建立不等关系比较大小;二是观察待比较式子的结构特征,合理选取基本不等式或其变形形式,结合不等式的性质比较大小.

变式题 (1)下列不等式中,一定成立的是 ( )

A. $x+\frac{4}{x}\geqslant4$ B. $\ln x+\frac{1}{\ln x}\geqslant2$

C. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ D. $2^x+2^{-x}\geqslant2$

(2)(多选题)已知 $a>0,b>0,a^2+b^2-ab=2$,则下列不等式恒成立的是 ( )

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\sqrt{2}$ B. $ab\leqslant2$

C. $a+b\leqslant2\sqrt{2}$ D. $a^2+b^2\geqslant4$

探究点二 变形用基本不等式求最值

微课1·方法

微点 1 配凑法

例 2 (1)设实数 x 满足 $x>0$,则函数 $y=2+3x+\frac{4}{x+1}$的最小值为 ( )

A. $4\sqrt{3}-1$ B. $4\sqrt{3}+2$

C. $4\sqrt{2}+1$ D. 6

(2)已知 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $x\sqrt{1-2x^2}$ 的最大值为________.

总结反思

基本不等式具有将"和式"转化为"积式"和将"积式"转化为"和式"的放缩功能,利用基本不等式求最值时,要根据式子的特征灵活变形,先配凑出积、和为常数的形式,再利用基本不等式求解.

微点 2 常数代换法

例 3 (1)[2023·河北邯郸一模] 已知 $a>0,b>0$,且 $a+b=2$,则$\frac{2}{a+1}+\frac{8}{b+1}$的最小值是 ( )

A. 2 B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. 9

(2)已知 $a>0,b>0$,且 $ab=1$,则$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$的最小值为________.

总结反思

常数代换法主要解决形如"已知 $x+y=t$(t 为常数),求 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的最值"的问题,通常先将 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 转化为 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\cdot\frac{x+y}{t}$,再用基本不等式求最值.

微点 3 消元法

例 4 (1)已知正实数 a,b 满足 $2a+b=ab$,则$\frac{a}{4}-\frac{2}{b}$的最小值为 ( )

A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

(2)[2023·江苏镇江二模] 已知 $xy>0$,且 $x^2+2xy=1$,则 x^2+y^2 的最小值为________.

总结反思

消元法,即根据条件建立两个量之间的函数关系,然后代入代数式转化为函数的最值求解.有时会出现多元的问题,解决方法是消元后利用基本不等式求解.

应用演练

1. 【微点 1】[2023·福建南平一模] 若函数 $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}(x>2)$在 $x=a$ 处取最小值,则 $a=$ ( )

A. $1+\sqrt{5}$ B. 2

C. 4 D. 6

2. 【微点 2】[2023·江苏连云港二模] 已知 $x+y=1, x>0, y>0$，则 $\frac{1}{2x}+\frac{x}{y+1}$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{5}{4}$　　B. 0

C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 【微点 1、微点 3】已知正实数 a, b 满足 $ab+2a-2=0$，则 $4a+b$ 的最小值是 ( )

A. 2　　B. $4\sqrt{2}-2$

C. $4\sqrt{3}-2$　　D. 6

4. 【微点 2】(多选题)[2024·江苏扬州模拟] 已知 $a>0, b>0$ 且 $a+b=\sqrt{2}$，则下列式子中一定成立的是 ( )

A. $a^2+b^2\geqslant 1$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant 2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $2^{a-b}>\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2^{\frac{3}{4}}$

5. 【微点 1】已知 $0<x<1$，则当 $x(4-3x)$ 取得最大值时，x 的值为________.

6. 【微点 3】已知 $x>0, y>0, \frac{1}{x}+y=2$，则 $\frac{x}{y}$ 的最小值为________.

探究点三　基本不等式的实际应用

例 5　为响应国家扩大内需的政策，某厂家拟在 2024 年举行促销活动，经调查测算，该产品的年销量(即该厂的年产量)x(单位:万件)与年促销费用 t($t\geqslant 0$，单位:万元)满足 $x=4-\frac{k}{2t+1}$(k 为常数). 如果不搞促销活动，则该产品的年销量只能是 1 万件. 已知 2024 年生产该产品的固定投入为 6 万元，每生产 1 万件该产品需要再投入 12 万元，该厂家将每件产品的销售价格定为每件产品平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分).

(1)设该厂家 2024 年该产品的年利润为 y 万元，求 y 关于 t 的函数关系式.

(2)该厂家 2024 年该产品的年促销费用为多少万元时该产品的年利润最大?

总结反思

有关函数最值的实际问题的解题技巧

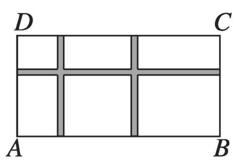
(1)根据实际问题建立函数的解析式，再利用基本不等式求得函数的最值.

(2)设变量时一般要把求最大值或最小值的变量定义为函数.

(3)解应用题时，一定要注意变量的实际意义及其取值范围.

(4)在应用基本不等式求函数最值时，若等号取不到，可利用函数的单调性求解.

变式题 (1)[2023·湖南名校联考] 某社区计划在一块空地上种植花卉，已知这块空地是面积为 $1800\ \mathrm{m}^2$ 的矩形 $ABCD$，为了方便居民观赏，在这块空地中间修了如图所示的三条宽度为 2 m 的人行通道，则种植花卉区域的面积的最大值是 ( )



A. $1208\ \mathrm{m}^2$　　B. $1448\ \mathrm{m}^2$

C. $1568\ \mathrm{m}^2$　　D. $1698\ \mathrm{m}^2$

(2)一家物流公司计划建立仓库储存货物，经过市场了解到下列信息：每月的土地占地费 y_1(单位:万元)与仓库到车站的距离 x(单位:km)成反比，每月的库存货物费 y_2(单位:万元)与仓库到车站的距离 x(单位:km)成正比. 若在距离车站 10 km 处建立仓库，则每月的土地占地费和库存货物费分别为 4 万元和 16 万元，则要使两项费用之和最小，仓库到车站的距离应为________km.

2.【微点1】[2023·广东珠海期末] 设函数 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+\frac{1}{2}\sin \pi x$,实数 a,b 满足不等式 $f(3a+b)+f(1-a)>0$,则下列不等式成立的是 ( )

A. $2a+b>1$

B. $2a+b<1$

C. $4a+b>3$

D. $4a+b<3$

3.【微点2、微点3】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,若 $f(2x+1)$ 为偶函数,且 $f(x)+f(4-x)=2$,$f(1)=2$,则 $\sum_{n=1}^{22}f(n)=$ ( )

A. 23　　B. 22

C. 19　　D. 18

4.【微点2、微点3】[2024·江苏南京六校调研] 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x)=-f(1+x)$,则下列说法正确的是 ( )

A. $f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$

B. 函数 $f(x)$ 的一个周期为 2

C. $f(2023)=0$

D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

5.【微点3】写出一个最小正周期为 1 的偶函数:$f(x)=$________.

思维拓展(一)
逻辑推理之抽象函数的性质

抽象函数主要有两个研究方向:一是由抽象函数结构、性质,联想已学过的基本函数,再由基本函数的相关结论,预测、猜想抽象函数可能有的相关结论.二是根据给出的抽象函数性质,推导其特殊的性质和关系.考题多和函数的性质(单调性、奇偶性、周期性等)相结合,以小题的方式考查.

例 [2022·新高考全国Ⅱ卷] 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$,$f(1)=1$,则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$ (A)

A. -3　　B. -2　　C. 0　　D. 1

【深度挖掘】

[解法一] 令 $x=1$,$y=0$,得 $2f(1)=f(1)f(0)$,所以 $f(0)=2$.令 $y=1$,得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)$,所以 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$,即 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$,所以 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$,所以 $f(x+2)=-f(x-1)$,即 $f(x+3)=-f(x)$,所以 $f(x)=-f(x+3)=f(x+6)$,即 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数.因为 $f(0)=2$,$f(1)=1$,$f(2)=f(1)-f(0)=-1$,$f(3)=-f(0)=-2$,$f(4)=-f(1)=-1$,$f(5)=-f(2)=1$,$f(6)=f(0)=2$,所以 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=[f(1)+f(2)+\cdots+f(18)]+[f(19)+f(20)+f(21)+f(22)]=f(19)+f(20)+f(21)+f(22)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-3$.

[解法二] 取 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x$ 符合条件,则 $T=6$,计算可得 $f(2)=-1$,$f(3)=-2$,$f(4)=-1$,$f(5)=1$,$f(6)=2$,所以 $\sum_{k=1}^{6}f(k)=1-1-2-1+1+2=0$,所以 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$.

◆◆ 总结反思

解决抽象函数问题的常用方法:

方法一(通法)

1. 赋值,特殊值代入求值,如令 $x=-1,0,1$.

2. 通过函数式得到抽象函数的性质:

(1)通过 $f(x_1)-f(x_2)$ 的变换判断单调性;

(2)令式子中出现 $f(x)$ 和 $f(-x)$,判断函数的奇偶性;

(3)换 x 为 $x+T$ 确定是否具有周期性.

方法二(模型化)

结合具体函数,使得抽象函数具体化,常见的有:

(1)$f(p+q)=f(p)+f(q)$——$y=kx$;

(2)$f(p+q)=f(p)f(q)$——$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$;

(3)$f(pq)=f(p)+f(q)$——$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$;

(4)$f(pq)=f(p)f(q)$——$y=x^n$(n 为常数);

(5)$f(p+q)=\dfrac{f(p)+f(q)}{1-f(p)f(q)}$——$y=\tan x$；

(6)$f(p+q)+f(p-q)=2f(p)f(q)$——$y=\cos \omega x$.

注意转化与化归策略、迭代策略、数形结合策略等的运用.

【针对训练】

1. 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f(x)$不恒为零且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$，则 $f\left(\dfrac{2025}{2}\right)$的值是 ( )

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. $\dfrac{5}{2}$

2. (多选题)[2024·山西忻州名校联考] 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数 $f(x)$满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f(4)=12$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，则 ( )

A. $f(1)=0$

B. $f(x)$是偶函数

C. $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增

D. 不等式 $f(x+3)-f\left(\dfrac{2}{x}\right)<6$ 的解集是$(0,1)$

3. (多选题)[2024·九省联考] 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq 0$，若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$，则 ( )

A. $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

B. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2$

C. 函数 $f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$是偶函数

D. 函数 $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$是减函数

4. 已知函数 $f(x)$满足 $f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，若 $f(3)=2$，则 $f(15)=$________.

第 9 讲　二次函数与幂函数

课标要求　**1.** 二次函数

(1)掌握二次函数的图象与性质(单调性、对称性、顶点、最值)；

(2)了解二次函数的广泛应用.

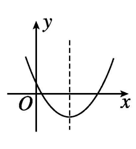
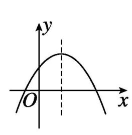
2. 幂函数

通过具体实例，结合 $y=x$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$，$y=x^3$ 的图象，理解它们的变化规律，了解幂函数.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 二次函数的图象和性质

解析式	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	________	________

(续表)

解析式	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$
单调性	在________上单调递减，在$\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递增	在________上单调递增，在$\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递减
顶点坐标	________	
奇偶性	当________时为偶函数	
对称轴方程	$x=-\dfrac{b}{2a}$	

(2)若函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{5}}(x^2+ax)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减,则 a 的取值范围是________.

◆◆ **总结反思**

利用对数函数的性质,求与对数函数有关的函数值域、最值和复合函数的单调性问题,必须弄清三方面的问题:一是定义域,所有问题都必须在定义域内讨论;二是底数与1的大小关系;三是复合函数的构成,即它是由哪些基本初等函数复合而成的.另外,解题时要注意数形结合、分类讨论、转化与化归思想的使用.

应用演练

1. 【微点1】已知 $a=3^{\frac{1}{3}}$, $b=\log_2\frac{1}{3}$, $c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{e}$,则 ( )

A. $a>c>b$　　B. $c>a>b$

C. $a>b>c$　　D. $c>b>a$

2. 【微点1】若 $a=\log_3 6$, $b=2$, $c=\log_{0.25}0.125$,则 ( )

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$

C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

3. 【微点3】已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-ax+8)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递减,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-6]$　　B. $[-11,-6]$

C. $(-11,-6]$　　D. $(-11,+\infty)$

4. 【微点2、微点3】[2024·重庆南开中学质检] 已知函数 $f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}+\sin x$,则不等式 $f(x)+f(2x+1)<0$ 的解集为 ( )

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

5. 【微点2】已知 $\log_a\frac{1}{2}<\log_a a^2$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$,则实数 a 的取值范围为________________.

增分微课1　指、对、幂函数之比较大小

类型一　直接利用单调性

例1 (1)[2023·南昌模拟] 已知 $a=\log_4 1.25$, $b=\log_5 1.2$, $c=\log_4 8$,则 ( )

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$

C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

(2) 已知 $a=\log_4 7$, $b=\log_9 30$, $c=e^{\ln\frac{3}{2}}$,则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$

C. $a<c<b$　　D. $c<b<a$

◆◆ **总结反思**

①底数相同,指数不同时,如 a^{x_1} 和 a^{x_2},利用指数函数 $y=a^x$ 的单调性比较大小;

②指数相同,底数不同时,如 x_1^a 和 x_2^a,利用幂函数 $y=x^a$ 的单调性比较大小;

③底数相同,真数不同时,如 $\log_a x_1$ 和 $\log_a x_2$,利用对数函数 $y=\log_a x$ 的单调性比较大小.

类型二　借助中间量

例2 (1)已知 $a=3^{0.2}$, $b=0.2^3$, $c=\log_3 0.2$,则 ( )

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

(2)[2023·沈阳三模] 已知 $a=\log_5 3$, $b=\log_{13}8$, $c=e^{-\frac{1}{2}}$,则下列判断正确的是 ( )

A. $a<b<c$

B. $a<c<b$

C. $c<a<b$

D. $b<c<a$

◆◆ **总结反思**

底数、指数、真数都不同时,寻找中间量0,1或者其他能判断大小关系的中间量$\left(如\frac{1}{2}\right)$,借助中间量进行大小关系的比较.

类型三 **作差(商)比法**

例 3 (1)[2023·安徽铜陵三模] 已知 $a=\log_7 5$,$b=\log_9 7$,$c=\log_{11} 9$,则 ( )

A. $a<b<c$ B. $a<c<b$

C. $b<a<c$ D. $c<b<a$

(2)[2023·沈阳二中月考] 已知正实数 x,y 满足 $x<y$,设 $a=xe^x+y$,$b=ye^y+x$,$c=ye^x+x$,则 a,b,c 的大小关系是 ( )

A. $a<c<b$ B. $c<a<b$

C. $c<b<a$ D. $b<c<a$

◆◆ **总结反思**

(1)一般情况下,作差或者作商可处理底数不一样的对数比较大小问题.

(2)作差或者作商的难点在于后续变形处理,注意此处的常见技巧和方法.

类型四 **利用函数图象**

例 4 (1)若 $\log_3 x=\log_4 y=\log_5 z<-1$,则 ( )

A. $3x<4y<5z$

B. $4y<3x<5z$

C. $4y<5z<3x$

D. $5z<4y<3x$

(2)已知 a,b,c 均大于 1,满足 $\dfrac{2a-1}{a-1}=2+\log_2 a$,$\dfrac{3b-2}{b-1}=3+\log_3 b$,$\dfrac{4c-3}{c-1}=4+\log_4 c$,则下列不等式成立的是 ( )

A. $c<b<a$ B. $a<b<c$

C. $a<c<b$ D. $c<a<b$

◆◆ **总结反思**

涉及某些由指数式、对数式给出的几个数的大小比较问题,可以把这几个数视为对应的指数函数、对数函数与另外某个函数图象交点的横坐标,利用图象的直观性解决.

类型五 **构造函数**

例 5 (1)已知 $e^x-2y>\ln y-x+\ln 2$,则 ( )

A. $x>2y$ B. $x<2y$

C. $x>\ln(2y)$ D. $x<\ln(2y)$

(2)已知实数 a,b,c 满足 $a^2+\log_2 a=0$,$2025^{-b}=\log_{2025} b$,$c=\log_7\sqrt{6}$,则 ( )

A. $a<b<c$ B. $c<a<b$

C. $b<c<a$ D. $c<b<a$

◆◆ **总结反思**

(1)从题目条件出发,探求比较对象的关系.

(2)根据条件等式的结构特征,发现同构特点,构造函数.

第 12 讲 函数的图象

课标要求

1. 掌握基本初等函数的图象特征,能熟练运用基本初等函数的图象解决问题.
2. 掌握图象的作法:描点法和图象变换.
3. 会运用函数的图象理解和研究函数性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 描点法作图

基本步骤是列表、描点、连线,具体为:

首先:①确定函数的定义域;②化简函数解析式;③讨论函数的性质(奇偶性、单调性、周期性).

其次:列表(尤其注意特殊点、零点、最大值点、最小值点、与坐标轴的交点).

最后:描点、连线.

2. 图象变换

(1)平移变换